Яковлева Л.В.

вчитель вищої категорії, старший вчитель

математики ЗОШ № 11 (м. Умань)

ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ПРО РІВНЯННЯ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

У роботі подані деякі відомості про рівняння вищих степенів.

The article deals with some aspects of high equations.

Математики постійно стикалися із задачами, що приводили їх до розв'язування рівнянь 3, 4, 5-го степенів. Найчастіше – 3-го степеня.

Упродовж багатьох сотень років учені безуспішно шукали рішення рівнянь 3-го степеня.

Розв'язування одного виду кубічного рівняння було відкрито талановитим узбецьким ученим з м. Самарканд Джемшидом аль-Паші (помер близько 1456 року). Геометричний метод розв'язування одного виду чисельного кубічного рівняння був відомий ще Архімеду. Алгебраїчний же метод рішення кубічного рівняння упродовж багатьох століть залишався невідомим. Перший крок у цьому напрямі зробив на початку XVI століття італійський учений Сціліон дель Феро. Він знайшов розв'язок рівняння $x^3+ax=b$ при $a>0$ і $b>0$. Своє розв'язання він повідомив і спадкоємцю по кафедрі Фіорі. Той скористався цим секретом і викликав на математичний двобій талановитого вченого Нікколо Тарталью (1500-1557), розраховуючи «вбити» своїм умінням розв'язувати кубічні рівняння. Тарталья довідався, що Фіоре знає таємницю розв'язання кубічного рівняння, і за тиждень до двобою самостійно знайшов розв'язок рівняння більш загального вигляду $x^3+px=q$, для будь-яких p і q.

12 лютого 1535 року, у день двобою, Тарталья розв'язав усі 30 задач Фіоре і переміг його.

Ось рівняння Тартальї, записані в нашій символіці:

Рівняння виду

$x^3 + px + q = 0$ має

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Усяке рівняння 3-го степеня може бути зведене за допомогою спеціальної підстановки до вигляду $x^3+px=q$.

Свій спосіб Тарталья повідомив по секрету ученому Кардано, який опублікував, його у своїй книзі. З тих пір формула зветься «формулою Кардано».

Учень Кардано, Феррарі (XVI століття) знайшов формулу коренів рівняння 4-го степеня. Таким чином, до кінця XVI століття вміли виражати корені рівнянь 1, 2, 3, 4-го степенів через їхні коефіцієнти за допомогою шести дій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня і здобування кореня) при цьому кількість дій, необхідних для знаходження коренів, була нескінченною.

Упродовж XVII-XVIII століття багато математиків безуспішно намагалися знайти подібну формулу для розв'язання рівнянь 5, 6-го степеня і більш високих.

На початку XIX століття норвезький математик Нільс Абель (1802-1829) довів, що рівняння п'ятого степеня і вищого у загальному вигляді нерозв'язні у радикалах (тобто не можна виразити їхні корені за допомогою шести дій).

З чисто практичної точки зору не завжди обов'язкове знання точних коренів рівнянь вищих степенів. У науці розроблено численні методи наближеного розв'язання рівнянь. Один із кращих способів належить великому російському математику Н.І. Лобачевському.

Розв'язування багатьох задач теоретичного і практичного характеру зводиться до розв'язування різних рівнянь та систем рівнянь. Тому розв'язуванню рівнянь та їх систем в алгебрі надається особливо велика увага.

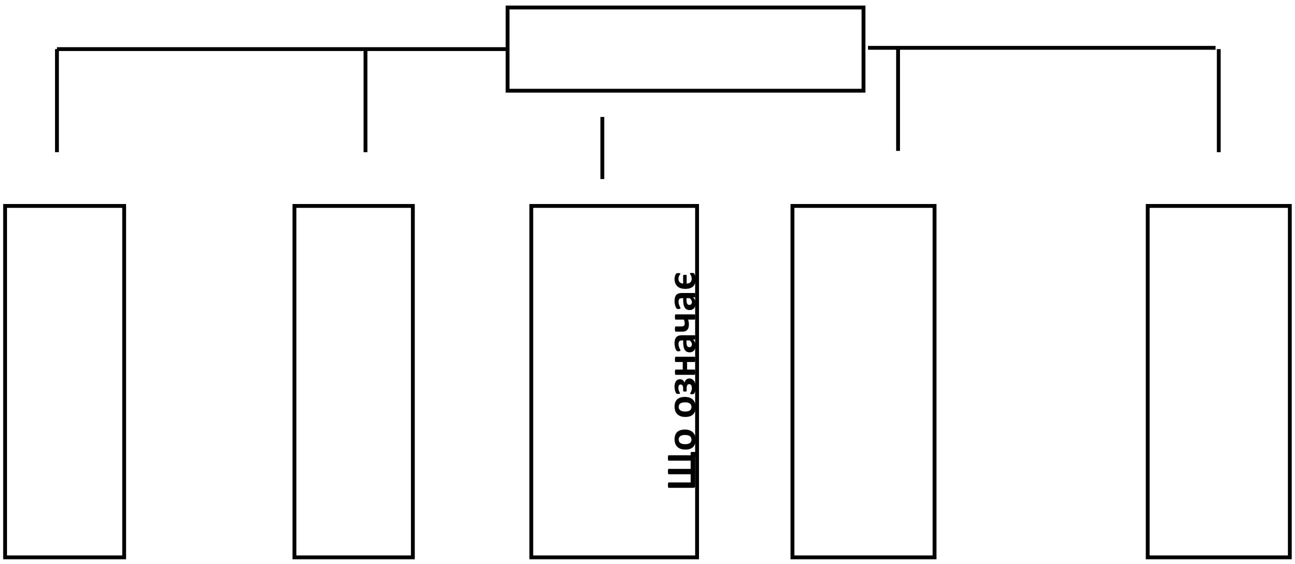
Основні теоретичні відомості про рівняння:

Рівняння – це рівність, яка містить невідоме.

1. Областю допустимих значень (ОДЗ) рівняння називається множина значень змінної, при якій мають зміст його ліва і права частини.
2. Число а з ОДЗ рівняння називається розв’язком (коренем) рівняння, якщо при підстановці його замість змінної рівняння перетворюється у правильну числову рівність.
3. Розв’язати рівняння – означає знайти усі його корені або довести, що вони не існують.
4. Якщо усі корені одного рівняння є коренями другого рівняння, то друге рівняння є наслідком першого.
5. Два рівняння називаються рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені.
6. Два рівняння рівносильні на деякій множині значень змінної, якщо вони мають одні й ті самі розв’язки, які належать цій множині.

Схема № 1

Основні теоретичні відомості про рівняння



2. Ціле раціональне рівняння

Рівняння $x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + ... + P_{n-1} \cdot x + P_n = 0$, де n – натуральне число, а $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ – довільні сталі коефіцієнти, називається зведеним цілим раціональним рівнянням.

Теорема 1. Якщо зведене ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтами має раціональний корінь, то цей корінь є ціле число.

Доведення. Нехай зведене ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтам має дробовий раціональний корінь $x = \frac{a}{b}$, де a і b – взаємно прості цілі числа і $b \neq 1$. Тоді

$$\frac{a^n}{b^n} + P_1 \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + P_2 \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + ... + P_{n-1} \frac{a}{b} + P_n = 0$$

або

$$\frac{a^n}{b^n} = -P_1 \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} - P_2 \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} - ... - P_{n-1} \frac{a}{b} - P_n$$

Помноживши обидві частини останньої рівності на b^{n-1}, одержимо

$$\frac{a^n}{b} = -P_1 a^{n-1} - P_2 b a^{n-2} - \ldots - P_{n-1} a b^{n-2} - P_n b^{n-1}$$

Одержали суперечність, так як ліва частина рівності – нескоротний дріб, а права – ціле число, так як a і b – взаємно прості цілі числа, $b \neq 1$ і {P_1, P_2, ..., P_n} – за умовою цілі числа. Ця суперечність доводить теорему.

Теорема 2. Якщо ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтами має цілі корені, то вони є дільниками вільного члена.

Доведення. Нехай ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтами мають цілий корінь $x = x_0$.

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Тоді виконується тотожність

$$a_0 x_0{}^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... a_{n-1} x + a_n = 0$$

або

$$a_n = x_0 (-a_0 x_0{}^{n-1} - a_1 x_0{}^{n-2} - ... - a_{n-1})$$

Із цього співвідношення видно, що вільний член a_n подається у вигляді добутку двох цілих чисел x_0 і $(-a_0 x_0{}^{n-1} - ... - a_{n-1})$.

Тому x_0 є дільником вільного члена a_n.

Існує багато різних типів раціональних рівнянь (Схема 2) і тому також існує багато методів розв’язування цілих раціональних рівнянь (Схема 3).

Схема № 2

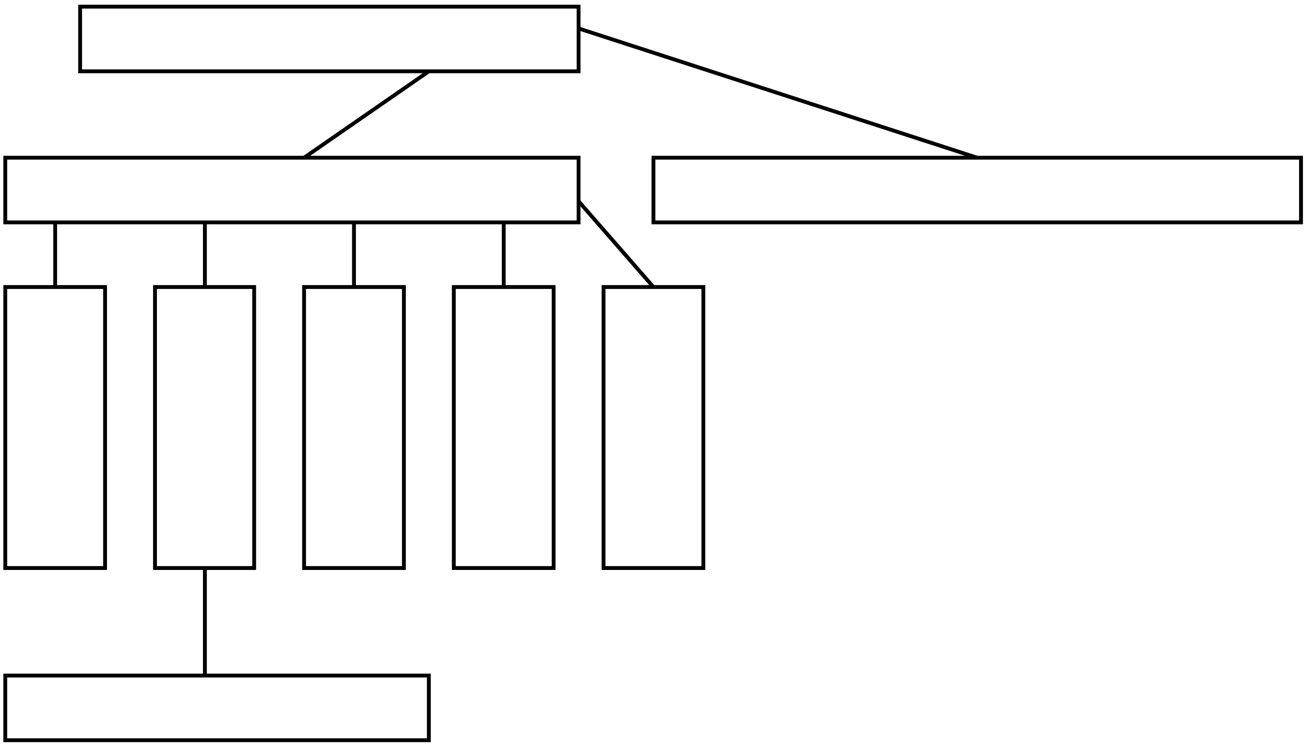
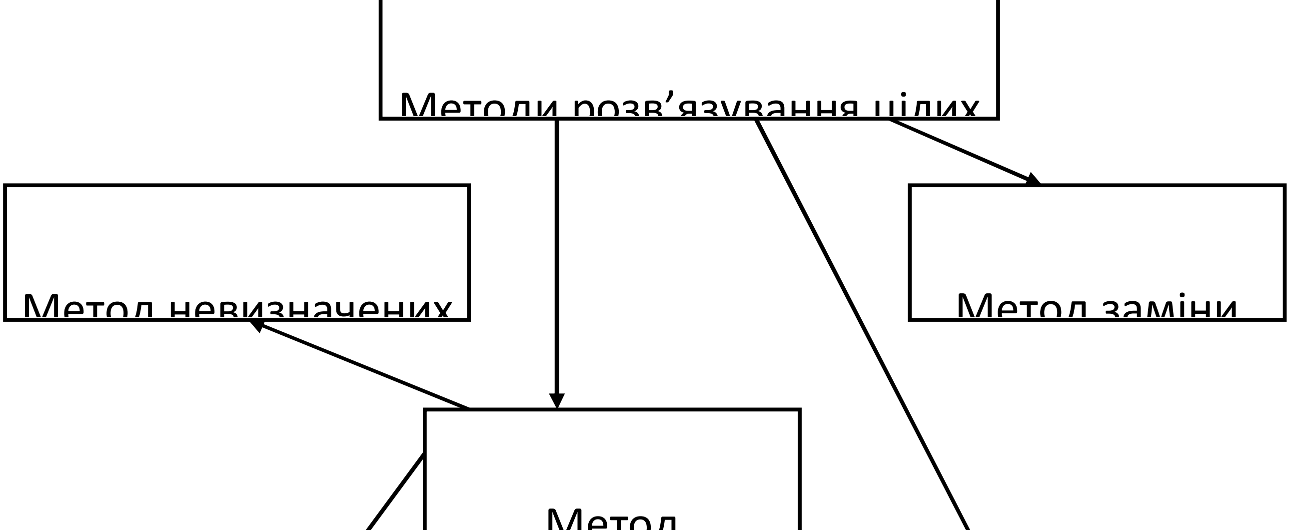


Схема № 3



Для розв’язування цілих раціональних алгебраїчних рівнянь застосовують теорему Безу і схему Горнера.

Основними методами розв’язування рівнянь вищих ступенів є метод розкладання на множники та заміни змінної, але загального методу не існує. Усі методи базуються на загальному підході, коли дане рівняння поступово замінюється простішим.

Робота містить понад 50 розв’язаних рівнянь вищих степенів із поступовим їх ускладненням. До кожного типу рівнянь пропонується декілька прикладів з метою кращого розуміння застосування теорії на практиці.

Тут подано загальні методи знаходження раціональних коренів і деякі окремі методи визначення дійсних і комплексних коренів раціональних рівнянь.

Робота буде корисною для учнів, які цікавляться математикою, навчаються у класах з поглибленим вивченням предмету, готуються до складання іспиту у вищий навчальний заклад, мріють пов’язати свою професійну діяльність з математикою.

ЛІТЕРАТУРА

1. Математика. Дитяча енциклопедія. – Харків: ФОЛІО, 2003.
2. Завало С.Т. Рівняння і нерівності. – К.: Радянська школа, 1973.
3. Дорофеєв Г.В., Потапов М.К., Розов А.Х. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. – М.: Наука, 1972.
4. Шарова Л.И. Уравнения и неравенства. – К.: Вища школа, 1981.
5. Каплан Я.П. Рівняння. – К.: Радянська школа.
6. Шкіль Л.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу 10. – К.: Освіта, 2000.
7. Бородин А.И. Математика. Пособие для подготовительных отделений. – К.: Вища школа, 1980.
8. Сканави В.И. Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы. – Москва: Высшая школа, 1988.
9. Залогин Н.С. Конкурсные задачи по математике. Государственное издательство технической литературы УССР. – К., 1964.
10. Шахно К.У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. – Минск: Высшая школа, 1965.