

УДК 37.016:51:[005.334.1:331.108.643]

## ПРОФІЛАКТИКА ПОМИЛОК УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ДРОБОВИХ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ У НОВІЙ УКРАЇНСЬКІЙ ШКОЛІ

**Благодир Людмила**, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики та методики навчання математики, Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини.

ORCID: 0000-0003-3730-6049

E-mail: blagodirla@gmail.com

*У статті розглянуто типові помилки учнів під час вивчення теми «Дробові раціональні вирази». Здійснено аналіз найпоширеніших математичних помилок школярів, психолого-педагогічні передумови їхньої появи, запропоновано методу організації превентивної діяльності вчителя математики з профілактики помилок.*

*Ефективність запропонованої методики перевірена автором у процесі дослідження: «Методична система аналізу та запобігання математичним помилкам у процесі вивчення алгебри в основній школі».*

**Ключові слова:** алгебра; дробові раціональні вирази; типові помилки; учні; превентивна діяльність; методика; учитель математики; освітній процес; попередження помилок.

## PREVENTION OF STUDENTS' MISTAKES DURING THE STUDY OF FRACTIONAL RATIONAL EXPRESSIONS IN THE NEW UKRAINIAN SCHOOL

**Blahodyr Liudmyla**, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University.

ORCID: 0000-0003-3730-6049

E-mail: blagodirla@gmail.com

*Among the semantic lines of the school course in algebra, the line of expressions and their transformations is essentially significant. Free execution of the main types of transformations of whole and fractional, rational and irrational expressions is a prerequisite for further successful mastering of other semantic lines. Therefore, the provision of strong knowledge and skills on identical transformations of expressions should be the subject of constant attention of the mathematics teacher.*

*The article considers typical mistakes of students during the study of the semantic line of expression and transformation of expressions, the course of algebra in institutions that provide basic secondary education, namely in the process of studying the topic "Fractional rational expressions". The analysis of the most widespread mathematical errors of schoolchildren, psychological and pedagogical preconditions of their occurrence is carried out. The method of organization of preventive activity of the teacher of mathematics is offered (under preventive activity of the teacher of mathematics we understand the activity initiated by necessity: to prevent mathematical mistakes of pupils, to correct the admitted, having found out the reasons of their occurrence), and transformations of whole expressions. Preventive activities should be organized as a process of interaction between teachers and students,*

during which through specially selected methods, firstly, reveals the origin of errors, and secondly, organizes work to prevent and correct them. The main task of the formation of preventive activities of students is to develop their ability to independently adhere to all its structural components. The result of such activities largely depends on how the teacher understands the structure of mental activity of students in specific learning conditions, is able to take into account the objective patterns of learning material, psychological and pedagogical patterns of perception and memory.

The effectiveness of the proposed method was tested by the author in the research process: "Methodical system of analysis and prevention of mathematical errors in the study of algebra in primary school".

**Keywords:** algebra; fractional rational expressions; typical errors; students; preventive activities; method; Teacher of Mathematics; educational process; error prevention.

Реформування освіти на основі компетентнісного підходу потребує суттєвих змін у всіх ланках педагогічної системи: у цілях і результатах навчання та виховання; у змісті освіти; у діяльності вчителя й учнів. Оновлення змісту освіти, створення нових освітніх стандартів, особливості психологічного та розумового розвитку сучасного підлітка, зміна критеріїв оцінювання знань, навичок та вмінь учнів, введення нових форм та засобів контролю потребують нового підходу як до формування особистості учня, організації його навчально-пізнавальної діяльності, так і до роботи над помилками, які він допускає, зокрема під час вивчення алгебри.

Результати учнівських контрольних робіт з математики під час проведеного нами дослідження, аналіз робіт зовнішнього незалежного оцінювання, державної підсумкової атестації та моніторинг якості математичної освіти загальноосвітніх навчальних закладів свідчать про те, що знання та навички учнів є недостатньо міцними: з переходом із класу в клас учні досить часто не тільки не розвивають і не вдосконалюють знання та навички, набуті раніше, а і частково гублять їх.

Проблема виявлення та робота з математичними помилками учнів знаходить своє відображення в працях учених-математиків, психологів і педагогів протягом всієї історії розвитку математичної освіти. Зокрема, у роботах Д. С. Ангелова, Г. А. Асанова, Г. П. Бевза, В. Г. Болтянського, В. М. Брадїса, Я. Й. Грудьонова, В. О. Далінгера, С. І. Зенько, І. М. Кирилецького, Н. О. Менчинської, П. С. Моденова, А. В. Самусенко, З. І. Слєпкань, О. А. Тарасової, П. В. Шеварьова.

Однак типові математичні помилки, яких припускаються школярі, «живучі» і залишаються проблемною зоною на шляху успішного навчання.

В освітньому процесі діяльність учня та учителя спрямована насамперед на виправлення допущених учнем помилок, корекцію знань. Провівши дослідження з вивчення причин появи найпоширеніших помилок учнів, пропонуємо зосередити увагу на діяльності з *попередження* та *запобігання* типових математичних помилок школярів, недопущення їх у майбутньому. Така діяльність отримала назву «*превентивна діяльність*» [1; 3].

Метою статті є психолого-педагогічний аналіз *типових* помилок учнів, яких вони припускаються під час вивчення алгебри, зокрема під час вивчення дробових раціональних виразів та перетворень таких виразів; розкриття причин їхнього виникнення згідно з асоціативно-рефлекторною теорією навчання. Окрім того, запропоновано методи й методичні прийоми організації діяльності з їхньої профілактики у новій українській школі.

Наявність «розривів» у часі між вивченням спорідненого матеріалу ускладнює забезпечення наступності у формуванні кожного нового поняття. Особливої уваги

потребує забезпечення наступності при переході від кожного попереднього етапу до наступного. У цьому випадку йдеться про перехід від вивчення дій над звичайними дробами, що розглядають у курсі математики 5–6 класів, до раціональних дробів, які вивчають у систематичному курсі алгебри у 7–9 класах.

Дробові раціональні вирази, за чинною програмою з математики, вивчають у 8 класі. Розглянемо типові помилки учнів під час вивчення зазначеної теми:

- під час ділення одночленів діляться тільки коефіцієнти, наприклад:  $(12x^2y^3) : (6x^2y^3) = 2x^2y^3$ . Ця помилка пояснюється звичкою виконувати дії над коефіцієнтами під час зведення подібних доданків.
- показники діленого діляться на показники дільника, наприклад:  $18x^8y^6 : 6x^2y^3 = 3x^4y^2$ , що свідчить про формальне засвоєння правила ділення степенів з однаковими основами.

З метою запобігання таких помилок, перш ніж ввести правило ділення одночленів, необхідно детально розписати декілька прикладів різного рівня складності,

наприклад:  $(4a^3) : (2a^3) = \frac{4aaa}{2aaa} = 2a^2$ ;  $(b^3a^2) : (ba) = \frac{bbbaa}{ba} = b^2a$ . Важливо

виробити звичку учнів час від часу перевіряти свої дії ділення дією множення та через підстановку числових значень букв у початковий і кінцевий вирази (якщо знайдені числові значення виразів будуть однакові, то вправу розв'язано правильно).

Значну кількість помилок учні допускають під час виконання дій над раціональними дробами, зокрема під час скорочення таких дробів.

Наприклад, пишуть:  $\frac{3a+b}{a+b} = \frac{b}{b}$ ;  $\frac{a+b}{c} = \frac{b}{c}$ ;  $\frac{a+b}{a} = b$ ;

а)  $\frac{3c}{c} = \frac{b}{c}$ ; б)  $\frac{ac}{c} = \frac{b}{c}$ ; в)  $\frac{a}{a} = b$ ;

г)  $\frac{5a^2b - a^2c - 2b}{a} = 5ab - a^2c - 2b$ ;

д)  $\frac{2(7a+3b) - (7a-3b)}{7a-3b} = 2(7a+3b)$ ; е)  $\frac{18m^2 + 12mn}{9m^2 + 12mn + 4n^2} = \frac{18m^2}{9m^2 + 4n^2}$ .

З метою попередження помилок:  $\frac{a^3}{a-b} = a-b$ ; б)  $\frac{a^3 - b^3}{a-b} = a^2 - b^2$

а)  $\frac{a-b}{a-b} = a-b$ ; ; б)  $\frac{a-b}{a-b} = a-b$  важливо уповільнити процес

звертання міркувань. Учні мають виконувати розгорнуте розв'язування вправ та здійснювати пояснення виконаних дій, використовуючи основну властивість дробу.

Наприклад,  $\frac{2a+5b}{2a+5b} = 5b$

Попередженню помилки виду:  $\frac{2a}{2a+5b} = 5b$  сприяє сформована звичка

обчислення значень початкового і кінцевого виразів. Наприклад, якщо підставити

значення  $a = 2$ ,  $b = 1$  помилка стає очевидною:  $\frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 5 \cdot 1} \neq 5 \cdot 1$ .

Учителю варто звернути особливу увагу і на такі помилки:

$$а) \frac{a-x}{a-x} = 0; \quad б) \frac{ab^2c}{ab^2c} = 0$$

. З метою їхнього запобігання необхідно домогтися, щоб учні усвідомили, що під час скорочення дробів результат взагалі не може дорівнювати нулю. Частка дорівнює нулю тільки ~~в~~ <sup>в</sup> випадку, коли ділене після зведення подібних доданків дорівнює нулю, наприклад:  $\frac{2a-2a}{b} = 0$ .

Часто учні у відповіді після скорочення дробу втрачають одиницю в чисельнику, пишуть:  $\frac{ab}{ab^2} = b$ , замість  $\frac{1}{b}$ ;  $\frac{12(a-2b)}{6(a-2b)} = 6(a-2b)$ , замість  $\frac{1}{6(a-2b)}$ . Причини

появи цих помилок аналогічні попереднім, крім того, учень вважає, що якщо в чисельнику скоротилось все, то це означає, що там нічого не залишилось. Ця помилка дуже часто зустрічається під час множення і ділення дробів, знаходження невідомого члена пропорції, розв'язування рівнянь. З метою запобігання таких помилок, учителю необхідно зосередити увагу учнів на розв'язуванні рівнянь, корені яких мають вигляд:  $n$ .

Типовою є також помилка:  $\frac{x-1}{1-x} = \frac{x-1}{x-1} = 1$ , що пов'язана з необхідністю зміни

знаку в чисельнику чи знаменнику дробу для можливості його скорочення. Як правило, учні змінюють знак у знаменнику, але забувають змінити знак перед дробом, що є наслідком несформованих умінь під час віднімання одночленів і многочленів та при внесенні в дужки.

Необхідно також ~~в~~ <sup>в</sup> (окре) ~~в~~ <sup>в</sup> помилку:

$$\frac{(b-a)^2}{-(a-b)^2} = -\frac{1}{a-b},$$

причина якої в тому, що учні не засвоїли

тотожність:  $(a-b)^2 = (b-a)^2$ .

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c},$$

Внаслідок нерозуміння властивості: учні допускають такі

помилки:  $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2b}{1+b} = \frac{2}{1+1} = 1$ .

Заслужують на увагу помилки учнів під час віднімання дробів. Типовою є помилка, що з'являється внаслідок віднімання раціональних дробів, де чисельником від'ємника є многочлен. Помилково «мінус» перед дробом школярі відносять не до всього чисельника, а тільки до першого його члена, наприклад:

$$\frac{2x+4y}{3} - \frac{3x-2y}{5} = \frac{10x+20y}{15} - \frac{9x+6y}{15} = \frac{x-14y}{15}.$$

Щоб запобігти таким помилкам, не потрібно поспішати зі звертанням міркувань. Під час виконання перших вправ варто пропонувати учням розгорнуто виконувати дії:

1) записувати чисельник від'ємника в дужках; 2) розкривати дужки за правилом; 3) зводити подібні доданки. Доцільним є використання алгоритмічного припису в поєднанні з виконанням завдання

$$\frac{10x+4y}{3} - \frac{3x-2y}{5}$$

Вправа. Виконати дію:

Алгоритмічний припис:

1. Звести дроби до спільного знаменника (оскільки 3 і 5 взаємно прості числа, то найменше спільне кратне дорівнює їхньому добутку):  $\frac{10x+4y}{15} - \frac{3x-2y}{15}$ .

2. Записати різницю дробів у вигляді дроби, записавши чисельник другого дроби в дужках:

$$\frac{10x+4y}{15} - \frac{3x-2y}{15} = \frac{10x+4y-(3x-2y)}{15}$$

3. Виконати дії, розкривши дужки, перед якими стоїть знак «мінус», та звести подібні доданки у чисельнику:

$$\frac{10x+4y-3x+2y}{15} = \frac{x+6y}{15}$$

Трапляються випадки, коли перетворення пропорцій та рівнянь через звільнення від знаменника переноситься учнями на дії з раціональними дробами:

$$\frac{3x-2x}{x+1} - \frac{5x-9}{x+1} = 3x^2 - 2x - 5x - 9.$$

Однією з причин появи таких помилок є низький рівень усвідомлення області визначення виразу.

$$\frac{a^8 b^6}{b^3 a^2} = a^4 b^2$$

Помилки виду: учні допускають внаслідок нерозуміння, що

скорочення дробів здійснюється діленням чисельника і знаменника на степінь з однаковою основою, а при діленні від показника діленого необхідно віднімати показник тієї ж основи дільника. Для попередження такого типу помилок, необхідно спочатку розгорнуто виконувати письмове ділення чисельника і знаменника на спільний множник, і тільки після належного засвоєння переходити до усного скорочення. Уміння правильно виконувати письмово й усно, наприклад, ділення:  $a^{3m-1} : a^{m-1} = a^{3m-1-(m-1)} = a^{3m-1-m+1} = a^{2m}$  є підґрунтям для правильного розв'язування деяких типів показникових рівнянь.

Типовими помилками під час додавання та віднімання алгебраїчних дробів є:

– додавання окремо чисельників і знаменників, наприклад:

$$\frac{a}{a} + \frac{b}{b} = \frac{a+b}{a+b}; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c};$$

– додавання чисельників без множення їх на додатковий множник, наприклад:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{mn}; \quad \frac{b}{b} - \frac{c}{c} = \frac{bc}{bc};$$

– виконується множення додаткового множника тільки на один член

многочлена в чисельнику, наприклад:  $\frac{2a+b}{c} + \frac{b-3a}{b} = \frac{2a+b^2}{cb} + \frac{b-3ac}{cb}$ ;

- ціле число без зведення до спільного знаменника додається до чисельника дроби, наприклад:  $6 + \frac{a}{b} = \frac{6b+a}{b}$ .

Причиною таких помилок є помилкові асоціації, що сформувалися під час виконання аналогічних дій зі звичайними дробами.

Характерними для дій множення і ділення алгебраїчних дробів є такі помилки учнів:

- знаменник дроби множать на ціле число, наприклад:  $\frac{2m}{n} \cdot a = \frac{2m}{na}$ .

Причиною помилки є несформовані навички перевірки правильності виконання завдання ще під час вивчення множення звичайних дробів.

- чисельник і знаменник дроби множать на ціле число, наприклад:  $\frac{5kn}{7n} \cdot n = \frac{5kn^2}{7n^2}$ . Причина – формальне засвоєння виконання множення

звичайного дроби на ціле число, несформовані навички самоконтролю.

- виконуючи ділення дробів, ділення замінюють множенням, але дільник не замінюють оберненим, наприклад:  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ;  $a : \frac{c}{d} = \frac{ac}{c}$ . Такі помилки є

результатом того, що учні не знають правила ділення на дріб; не вміють перевірити свої відповіді через підставлення числових значень. Внаслідок помилкової асоціації, сформованої під час множення звичайних дробів, учні допускають помилки, виконуючи ділення раціональних дробів.

Алгебраїчні помилки учні допускають з різних причин. Тому важливо і необхідно вчасно з'ясувати походження цих помилок, причини їхньої появи, а також дібрати належний методичний прийом для їхнього попередження та усунення.

Необхідною складовою попередження помилок учнів з алгебри є дотримання зв'язку з попереднім матеріалом під час вивчення нового рівня певної змістової лінії. Тому перед вивченням теми: «Дробові раціональні вирази» вчителю важливо організувати повторення та відтворення вивченого раніше базового матеріалу: дії над дробами з різними знаменниками, скорочення дробів, властивості степенів, формули скороченого множення, розкладання многочлена та одночлена на множники. Краще це зробити у вигляді змагання, гри чи турніру. Деякі питання можна повторити за допомогою евристичної бесіди або використанням інтерактивної технології «мозковий штурм», заохочуючи учнів до відповідей на проблемні та провокаційні питання.

У роботі з помилками важливим є прийом використання контрприкладів. Якщо учень скорочує дріб  $\frac{ad+m}{a(c+b)}$  на  $a$ , доцільно запропонувати йому водночас виконати скорочення дроби  $\frac{ad+m}{a(d+m)}$ , де дістаємо такий результат, як попередній, хоча,

очевидно, що ці дроби різні, в чому можна пересвідчитись, підставивши в кожен з них конкретні числові значення.

Тотожні перетворення цілих та дробових раціональних виразів у курсі алгебри основної школи займають важливе місце. Тому вчителю необхідно прикласти максимум зусиль, використати доцільні методи, засоби та прийоми в роботі з попередження та недопущення помилок учнів як під час вивчення теми, так і під час використання набутих знань у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей, вивченні властивостей функцій.

У статті запропоновано методичні прийоми організації *превентивної* діяльності з попередження типових помилок учнів під час вивчення дробових раціональних виразів.

Тотожні перетворення цілих та дробових раціональних виразів у курсі алгебри основної школи займають важливе місце. Тому вчителю необхідно прикласти максимум зусиль, використати доцільні методи, засоби та прийоми в роботі з попередження та недопущення помилок учнів як під час вивчення теми, так і під час використання набутих знань у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей, вивченні властивостей функцій.

Подальших досліджень потребує організація *превентивної* діяльності вчителя математики під час вивчення рівнянь та нерівностей.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Благодир Л. А. Превентивна діяльність під час навчання школярів математики. *Математика в рідній школі*. 2014. № 2. С. 16–20.
2. Бродський Я. С., Павлов О. Л. Шляхи реформування шкільної математичної освіти. *Математика в школах України*. 2003. № 26. С. 2–6.
3. Благодир Л., Швець В. Превентивна діяльність вчителя математики: зміст і структура. *Дидактика математики: проблеми и исследования*. Донецьк: ТЕАН, 2010. Вып. 36. С. 13–18.

#### REFERENCES

1. Blahodyr, L. A. (2014). Preventyvna diialnist pid chas navchannia shkoliariv matematyky [Preventive activity during the teaching of mathematics to students]. *Matematyka v ridnii shkoli – Mathematics at home school*, 2, 16–20 [in Ukrainian].
2. Brodskiy, Ya. S., Pavlov, O. L. (2003). Shliakhy reformuvannia shkilnoi matematychnoi osvity. *Matematyka v shkolakh Ukrainy – Mathematics in schools of Ukraine*, 26, 2–6 [in Ukrainian].
3. Blahodyr, L. A., Shvets, V. O. (2010). Preventyvna diialnist vchytelia matematyky: zmist i struktura. *Dydaktyka matematyky: Problemy i issledovaniya: mezhd. sb. nauch. rabot – International Collection of Scientific Works “Didactics of mathematics: Problems and Investigations”, issue 36, 13–18* [in Ukrainian].