

УДК 373.5.016:51:004.4

DOI: 10.31499/2307-4906.2.2026.362778

ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ ЗАСОБАМИ GEOGEBRA (НА ПРИКЛАДІ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»)

Наталія Кугай, доктор педагогічних наук, доцент, доцент кафедри фізико-математичної освіти та інформатики, Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка.

ORCID: 0000-0002-9193-1956

E-mail: nkuhai@gmail.com

Артемій Громак, магістрант 61М-М групи спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика), Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка.

ORCID: 0009-0003-6526-4437

E-mail: artemgromak604@gmail.com

Запропоновано методику формування дослідницьких умінь старшокласників засобами GeoGebra під час вивчення теми «Похідна та її застосування». Розроблено інтерактивні моделі і робочі аркуші на принципах «сліпого дослідження» й візуальної симуляції. Описано практичний досвід впровадження методики, який підтвердив її ефективність.

***Ключові слова:** інтерактивні візуалізаційні моделі; GeoGebra; похідна функції; монотонність функції; екстремуми на відрізку; точки перегину; вгнутість; «сліпе дослідження»; дослідницькі уміння старшокласників.*

FORMATION OF RESEARCH SKILLS IN SECONDARY SCHOOL STUDENTS BY MEANS OF GEOGEBRA (CASE STUDY: “THE DERIVATIVE AND ITS APPLICATIONS”)

Nataliia Kuhai, Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physics and Mathematics Education and Informatics, Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University.

ORCID: 0000-0002-9193-1956

E-mail: nkuhai@gmail.com

Artemii Gromak, Master's Student, group 61M-M, specialty A4.04 Secondary Education (Mathematics), Oleksandr Dovzhenko Hlukhiv National Pedagogical University.

ORCID: 0009-0003-6526-4437

E-mail: artemgromak604@gmail.com

The article proposes a comprehensive methodology for the formation of research skills in high school students through the use of the GeoGebra dynamic mathematics environment during the study of the

topic “The Derivative and Its Applications”. The authors have designed and developed a complex of original interactive visualization models focusing on key concepts: function monotonicity and extrema, concavity (convexity) and points of inflection, as well as finding the global maximum and minimum values of a function on a closed interval. It has been established that the systematic application of these dynamic models contributes significantly to the development of students’ cognitive abilities, specifically their skills in formulating scientific hypotheses, establishing cause-and-effect relationships, conducting mathematical experiments, and synthesizing logical conclusions. For each specific model, the authors created dedicated research worksheets (“Researcher Sheets”) based on the pedagogical principles of “blind research” and visual simulation. Each “Researcher Sheet” is structured to include a clearly defined goal, step-by-step instructions for the digital investigation, provocative questions designed to stimulate critical thinking, a core hypothesis or research task, and guided blanks for conclusions that students must derive independently. The article provides detailed methodological recommendations for the practical implementation of these models and their corresponding worksheets within the educational process, offering a thorough justification for their pedagogical expediency. The proposed instructional approach facilitates a fundamental transition for students from passive observation of teacher-led demonstrations to active engagement in formulating and testing hypotheses regarding the properties of functions based on the dynamic graphs of their derivatives. The paper describes practical experience in implementing this methodology, which has confirmed its high efficiency in overcoming the formalistic acquisition of knowledge. Furthermore, it enhances the level of conceptual understanding regarding the geometric meaning of fundamental differential calculus facts, including necessary and sufficient conditions for function monotonicity, conditions for curve concavity (convexity), the essence of inflection points and the criteria for their existence, and the algorithmic scheme for investigating functions for extremal values on an interval. The materials presented in the article possess significant practical value for mathematics educators, pedagogical researchers, and developers of modern digital educational resources.

Keywords: school mathematics course; interactive visualization models; GeoGebra; derivative of a function; derivative graph; monotonicity of a function; extrema on an interval; inflection points; concavity (convexity); “blind research”; research skills of high school students.

Сучасна парадигма математичної освіти зазнає докорінних змін, зумовлених необхідністю адаптації абстрактних математичних концепцій до когнітивних особливостей цифрового покоління учнів. Вивчення похідної як фундаментального поняття математичного аналізу в шкільному курсі традиційно вважається одним із найскладніших етапів через необхідність одночасного оперування графічними, числовими та символічними зображеннями [1; 2; 3]. Крім того, поняття похідної пов’язано з трьома важливими і достатньо складними для розуміння старшокласниками поняттями: функція, відношення приростів, границя [1; 2].

Дослідження як зарубіжних, так і вітчизняних авторів демонструють, що традиційний підхід «крейди та дошки» (або «паперу й олівця») часто призводить до формалізму, коли учні здатні механічно застосовувати правила диференціювання, але не розуміють суті похідної як швидкості зміни або нахилу дотичної [1; 3; 4]. Впровадження інтерактивних технологій та динамічних симуляцій сприяє трансформації цього процесу, перетворюючи пасивне сприйняття алгоритмів на активне дослідження математичних об’єктів і розвиток дослідницьких умінь [4; 5; 6; 7; 8].

Традиційне викладання теми «Похідна та її застосування» часто зводиться до формального запам’ятовування правил і алгоритмів диференціювання [1]. Учні механічно знаходять критичні точки, розв’язуючи рівняння $f'(x) = 0$, проте нерідко відчують труднощі з концептуальним розумінням того, як саме поведінка похідної визначає графік основної функції [3]. Геометричний сенс знаку першої похідної як

напряму зміни функції, а другої – як характеру вгнутості, залишається для багатьох абстракцією [2]. Особливо гостро постає проблема «читання» графіків: старшокласникам важко прогнозувати загальну поведінку $f(x)$ виключно за виглядом $f'(x)$ і $f''(x)$ [4; 9].

Сучасне навчання математичного аналізу вимагає переходу від маніпулювання формулами до інтуїтивного та візуального розуміння. Оскільки класичні підручники здебільшого обмежуються статичними ілюстраціями, це унеможлиблює повноцінне спостереження за динамікою зміни функції. Відтак, виникає потреба у використанні цифрових інструментів, що поєднують інтерактивність та дослідницький підхід [6; 8]. З огляду на важливість візуального мислення в математиці [10; 11; 12], впровадження систем динамічної математики (наприклад, GeoGebra або Desmos) сприяє реалізації принципу конструктивізму і трансформації репродуктивного засвоєння знань у процес самостійного конструювання математичних закономірностей [5; 7].

Проблема впровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) та динамічних симуляцій у процес навчання математики є об'єктом пильної уваги сучасних дослідників [6; 8]. З аналізу наукових праць слідує, що використання таких інструментів як GeoGebra та Desmos суттєво трансформує методику вивчення теми «Похідна та її застосування», зміщуючи акцент з механічних обчислень на розвиток дослідницьких умінь старшокласників [1; 3; 7; 9].

Сучасні дослідження часто спираються на конструктивістські рамки, зокрема теорію APOS (Action-Process-Object-Schema) та концепцію «Трьох світів математики» (TWM) Д. Талла [4; 10; 11]. Науковці зазначають, що застосування симуляцій дозволяє учням проходити шлях від «тілесного» втілення концепцій (наприклад, відчуття зміни нахилу дотичної) до символічного маніпулювання [2; 4; 12]. Результати експериментів свідчать, що використання Desmos Classroom допомагає більшості учнів (близько 76%) досягти рівня «процесуального мислення» під час вивчення диференційовності функції [4]. О. Гриб'юк підкреслює, що комп'ютерно орієнтовані методичні системи дослідницького навчання (КОМСДН) сприяють подоланню «експериментально-теоретичного розриву» у свідомості старшокласників [5].

Дослідники акцентують увагу на тому, що симуляції сприяють перетворенню абстрактних понять на візуальні об'єкти, якими можна маніпулювати [3; 8]. У контексті вивчення похідної це проявляється: використання інструментів «Повзунок» та «Переміщувати» для демонстрації того, як січна наближається до дотичної [2; 5; 7]; автоматизація побудови графіків дозволяє учням зосередитися на аналізі монотонності, точок екстремуму та перегину, критично оцінюючи власні аналітичні розрахунки [7]; моделювання процесів оптимізації (наприклад, знаходження мінімальної площі поверхні або максимального об'єму), де учні можуть висувати гіпотези та перевіряти їх експериментально [3; 7; 9].

Формування дослідницької компетентності розглядається як готовність до самостійного розв'язування творчих задач [6]. Використання GeoGebra надає учням можливість діяти як «молоді дослідники», проводячи комп'ютерні експерименти, формулюючи та відхиляючи гіпотези [5]. І. Дереза та О. Іванова наголошують, що інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) сприяють організації евристичного навчання, за якого учень бере на себе роль винахідника [7]. Для розвитку дослідницьких умінь важливим аспектом є розвиток критичного мислення: симуляції

сприяють швидкому виявленню помилок в обчисленнях, побудовах і порівнянню різних підходів до розв'язання задач [7; 8; 9].

Незважаючи на позитивний вплив, науковці зауважують, що успіх залежить від педагогічної виваженості вчителя. Існує ризик підміни глибокого мислення поверхневим спостереженням, тому завдання мають бути сформульовані так, щоб стимулювати розумову діяльність, яку не може замінити комп'ютер [5; 9]. Також існують й технічні труднощі, наприклад, складність введення математичних символів на певних платформах, що може сповільнювати процес переходу до абстрактного мислення [9].

Отже, з аналізу останніх публікацій вітчизняних і зарубіжних науковців випливає, що динамічні симуляції є ефективним засобом розвитку дослідницьких умінь старшокласників. Вони забезпечують візуальну опору для складних понять диференціального числення, сприяють активізації пізнавального інтересу та реалізації експериментального підходу до вивчення математики [3; 5; 7].

Водночас, попри значну кількість теоретичних напрацювань, питання сучасного методичного забезпечення вивчення елементів диференціального числення засобами цифрового моделювання потребує подальшої деталізації, зокрема в контексті розвитку дослідницьких умінь учнів.

Варто зазначити, що у відкритому доступі (зокрема на платформі GeoGebra Materials) існує значна кількість готових аплетів для демонстрації похідної. Проте більшість із них мають суттєві недоліки для використання в українському освітньому контексті: вони часто є англійськими, мають закритий код (що унеможливує зміну базових налаштувань учителем) та орієнтовані переважно на пасивну демонстрацію, а не на активну діяльність учня. Багато існуючих моделей є надмірно перевантаженими візуальними елементами або жорстко прив'язані до однієї конкретної функції, виступаючи для учня своєрідним «чорним ящиком». Саме тому виникла необхідність створення авторського комплексу інтерактивних візуалізаційних моделей. Їхня головна перевага полягає у відкритій архітектурі, адаптованості до вітчизняної програми та, найголовніше, – у вбудованому функціоналі для реалізації методики «сліпого дослідження» (можливості приховувати елементи для стимулювання самостійного прогнозування).

Мета статті: обґрунтувати доцільність застосування інтерактивних моделей під час вивчення елементів диференціального числення в шкільному курсі математики, описати алгоритми розробки таких моделей у середовищі GeoGebra та розкрити методику їхнього використання для розвитку дослідницьких умінь учнів.

Для теми «Похідна та її застосування» ідеальним інструментом є динамічна геометрична модель (наприклад, у GeoGebra), яка дозволяє учневі пройти шлях від спостереження до наукового висновку. У процесі вивчення теми «Похідна та її застосування» із використанням GeoGebra формуються ключові компоненти дослідницьких умінь старшокласників через цілеспрямовану організацію діяльності за схемою «динамічна модель GeoGebra – дослідницьке завдання – сформоване вміння».

1. Уміння висувати гіпотези (прогностично-гіпотетичний компонент).

Це початковий етап дослідження, де учень переходить від пасивного споглядання до активного припущення.

- Модель: динамічна побудова графіка функції та дотичної в GeoGebra (з

можливістю змінювати точку дотику).

- Завдання: дослідити, як змінюється кут нахилу дотичної під час переміщення точки вздовж графіка; передбачити, де функція зростає або спадає.

- Вміння: учні формулюють гіпотези щодо зв'язку між знаком похідної та характером монотонності функції.

2. Уміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки (пошуково-аналітичний компонент).

Тут відбувається перевірка гіпотези та виявлення внутрішніх механізмів математичного об'єкта.

- Модель: одночасне відображення графіків функції та її похідної.

- Завдання: проаналізувати відповідність між поведінкою функції (зростання/спадання) і знаком похідної; пояснити причини змін.

- Вміння: учні встановлюють причинно-наслідкові зв'язки між значеннями похідної та зміною функції.

3. Уміння проводити дослідження (експериментувати) (процесуально-технологічний компонент).

Цей етап пов'язаний із самостійним моделюванням та оперуванням інструментами дослідження.

- Модель: параметричні функції з повзунками (наприклад, $f(x) = ax^2 + bx + c$).

- Завдання: змінювати параметри та досліджувати, як це впливає на графік функції, її похідну та екстремуми.

- Вміння: учні здійснюють математичний експеримент, спостерігають, фіксують результати та аналізують їх.

4. Уміння робити висновки (рефлексивно-оцінювальний компонент).

Цей етап полягає не просто у завершенні роботи, а у критичному осмисленні всього процесу дослідження та отриманих результатів.

- Модель: побудова графіка функції з виокремленими критичними точками.

- Завдання: визначити точки максимуму і мінімуму, обґрунтувати за допомогою похідної.

- Вміння: учні формулюють обґрунтовані висновки на основі отриманих даних і спостережень.

5. Уміння узагальнювати (рефлексивно-узагальнюючий компонент).

Фінальний етап, де окремі спостереження перетворюються на системне знання. Це етап «погляду назад», де учень перетворює виконані дії на свідомий досвід.

- Модель: динамічні графіки сім'ї функцій (наприклад, $f(x) = ax^2 + bx + c$ при зміні коефіцієнтів).

- Завдання: виявити спільні закономірності між функцією та її похідною для різних типів функцій.

- Вміння: учні узагальнюють результати досліджень, формулюють правила (наприклад, ознаки зростання/спадання, умови екстремуму).

Таким чином, використання GeoGebra забезпечує інтеграцію візуалізації, експерименту та аналізу, що сприяє цілеспрямованому формуванню дослідницьких умінь через активну дослідницьку діяльність учнів.

Методика з використанням моделей у GeoGebra та дослідницьких робочих

аркушів складається з трьох взаємопов'язаних блоків і повністю реалізується в середовищі GeoGebra Classic (онлайн-версія або десктопна програма). Кожен блок супроводжується дослідницьким робочим аркушем. Нижче наведемо опис моделей та покрокові інструкції їх створення.

1. Модель «Монотонність та екстремуми функції» (два графіки $f(x)$ і $f'(x)$). Учні бачать два графіки один під одним і працюють з двома графіками та рухомою точкою. Рухома точка ковзає по $f(x)$, у реальному часі відображається значення та знак $f'(x)$. Ключовий момент: при проходженні через максимум графік $f'(x)$ перетинає вісь Ox зверху вниз ($+ \rightarrow -$).

Покрокова інструкція створення моделі: 1. Відкрийте GeoGebra, введіть функцію, наприклад $f(x) = x^3 - 3x + 1$. 2. Створіть похідну: $f'(x) = \text{Derivative}(f)$. 3. Візуально розмежуйте графіки: змініть колір похідної на червоний. Графік основної функції зробіть товщим. 4. Створіть слайдер t (від -5 до 5, крок 0.1). 5. Створіть рухому точку $A = (t, f(t))$. 6. Додайте текстові об'єкти: значення $f'(x)$ та умовний знак (зелений/червоний). 7. Для «сліпого дослідження» створіть чекбокс «Показати $f(x)$ » і налаштуйте видимість графіка через скрипт. 8. Увімкніть анімацію слайдера t .

Інтерактивна версія моделі «Монотонність та екстремуми функції» (рис. 1) доступна за посиланням: <https://www.geogebra.org/m/smct25eh>.

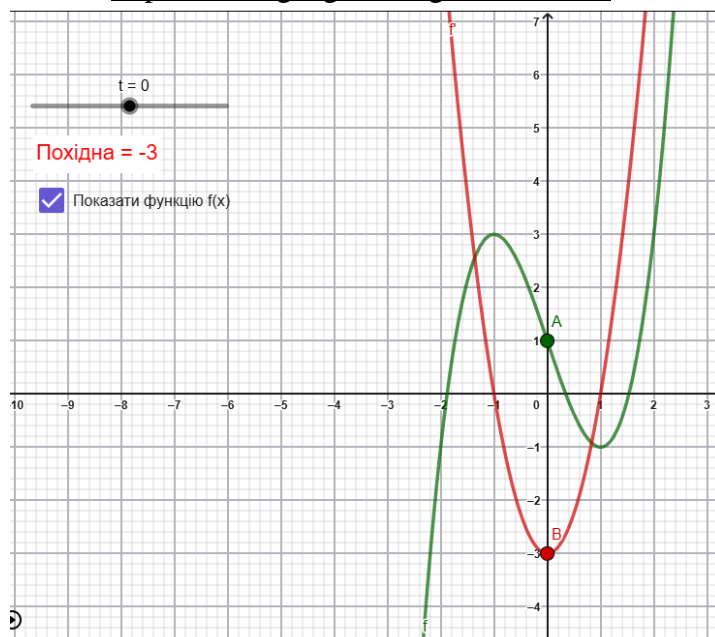


Рис. 1. Модель «Монотонність та екстремуми функції»

Робочий «Аркуш дослідника» №1. Зв'язок знака похідної та монотонності.

Мета: Самостійно вивести ознаки зростання та спадання функції через зв'язок графіка функції та її похідної.

Структура аркуша:

Крок 1: Поглянь на графік функції $f(x)$ та її похідної $f'(x)$. Знайди ділянки, де функція «йде вгору» (зростає). Яке значення (додатне чи від'ємне) має в цей час похідна? Дія в GeoGebra: Рухай точку по графіку $f(x)$ у режимі, де видно обидва графіки. Запиши спостереження в таблицю 1:

Таблиця 1

Таблиця спостережень

Ділянка інтервалу	Знак $f'(x)$ (+, -, 0)	Поведінка функції $f(x)$ (зростає/спадає/стоїть)
-------------------	------------------------	--

Крок 2: Проведи точку через «вершину» пагорба (локальний максимум). Що відбувається з графіком похідної в цей момент? Яке значення вона приймає? *Ключове спостереження:* Графік $f'(x)$ перетинає вісь OX зверху вниз (+ \rightarrow -).

Крок 3 (Гіпотеза): Спробуй передбачити: якщо графік похідної знаходиться нижче осі OX , як буде поводитися основна функція? Перевір свою здогадку, рухаючи повзунок у режимі «сліпого дослідження».

Висновок: Заповни пропуски: «Якщо $f'(x) > 0$, то функція _____, а якщо $f'(x) = 0$, то це точка _____. Якщо $f'(x) < 0$, то функція _____».

Провокаційне запитання (для обговорення): Чи може графік функції бути горизонтальним (функція «відпочивати»), якщо похідна в кожній точці дорівнює 1? Поясни.

Рекомендації: Використовуйте модель з двома графіками один під одним. Увімкніть режим «сліпого дослідження» (приховати $f(x)$) для прогнозування.

2. Модель «Вгнутість (опуклість) та точки перегину» (рухома дотична + $f''(x)$). Рухома точка з дотичною вздовж кривої, відображення значення $f''(x)$ і положення дотичної відносно графіка. Учні фіксують момент, коли дотична «прошиває» графік.

Покрокова інструкція створення моделі: 1. Введіть функцію $f(x)$. 2. Створіть слайдер t і точку $A = (t, f(t))$. 3. Додайте дотичну: Tangent (A, f). 4. Обчисліть другу похідну: $f''(x) = \text{Derivative}(f, 2)$. 5. Додайте тексти: значення $f''(x)$ та опис характеру вгнутості. 6. Налаштуйте динамічний колір дотичної залежно від знака $f''(x)$. 7. Додайте чекбокси для приховування елементів (режим сліпого дослідження). 8. Створіть кнопку анімації.

Інтерактивна версія моделі «Вгнутість (опуклість) та точки перегину» (рис. 2) доступна за посиланням: <https://www.geogebra.org/m/q4n8nu5p>.

Робочий «Аркуш дослідника» №2. Таємниця точок перегину та «поведінка» дотичної.

Мета: З'ясувати геометричний зміст другої похідної та умови зміни опуклості.

Структура аркуша:

Крок 1: Увімкни відображення дотичної. Рухай точку по вгнутій ділянці, де функція схожа на «чашу» (вгнута). Де знаходиться дотична - над графіком чи під ним? *Спостереження:* Запиши значення $f''(x)$ у цих точках.

Крок 2: Продовжуй рух до точки перегину. Знайди точку перегину. Поміть момент, коли дотична «прошиває» графік і опиняється з іншого боку. Яке значення другої похідної $f''(x)$ відповідає цій точці?

Крок 3 (Дослідження): Як змінюється напрям обертання дотичної при проходженні точки перегину? Як змінюється кут нахилу дотичної (вона обертається за годинниковою стрілкою чи проти), коли ми проходимо точку перегину?

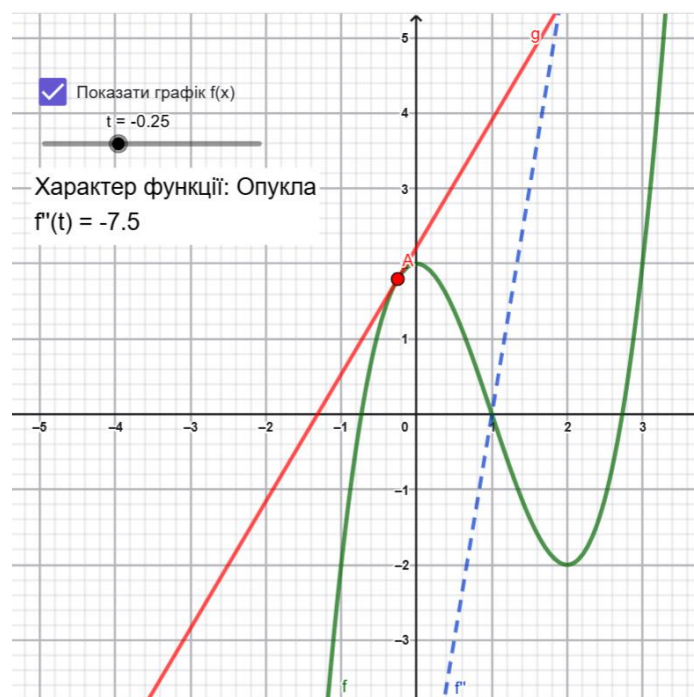


Рис. 2. Модель «Вгнутість (опуклість) та точки перегину» (рухома дотична + $f''(x)$)

Висновок: Сформулюй умову: «Точка x_0 є точкою перегину, якщо в ній друга похідна дорівнює ___ або не існує, а при переході через неї $f''(x)$ змінює ___».

Провокаційне запитання: Уяви, що ти рухаєшся графіком на велосипеді. У точці перегину твоє кермо на мить стає прямо, хоча дорога продовжує закручуватися, але вже в інший бік. Чи може точка перегину бути одночасно точкою екстремуму? Перевір на функції $y = x^3$ в точці $x = 0$.

Контекст НМТ/ЗНО: Це допомагає зрозуміти, чому $f'(x) = 0$ – це лише «підозра» на екстремум, а не гарантія його наявності.

Рекомендації: Використовуйте модель з рухомою дотичною та відображенням $f''(x)$. Динамічний колір дотичної допомагає візуально фіксувати зміну.

3. Модель «Найбільше й найменше значення функції на відрізку $[a; b]$ » («штори»). Графік функції з двома рухомими вертикальними лініями (a і b). Автоматично виділяється інтервал, показуються значення на кінцях і критичних точках, виділяється глобальний екстремум.

Покрокова інструкція створення моделі: 1. Введіть функцію $f(x)$. 2. Створіть слайдери a і b (з умовою $b > a$). 3. Додайте вертикальні лінії $x = a$ і $x = b$. 4. Затініть інтервал за допомогою полігону з прозорістю. 5. Обчисліть $\text{Max}(f, a, b)$ і $\text{Min}(f, a, b)$, додайте точки на кінцях і екстремуми ($\text{Extremum}(f, a, b)$). 6. Додайте тексти з автоматичним оновленням максимального/мінімального значення. 7. Додайте чекбокси для відображення локальних екстремумів.

Інтерактивна версія моделі «Найбільше та найменше значення на відрізку $[a; b]$ » (рис. 3) доступна за посиланням: <https://www.geogebra.org/m/ywkqk2wp>.

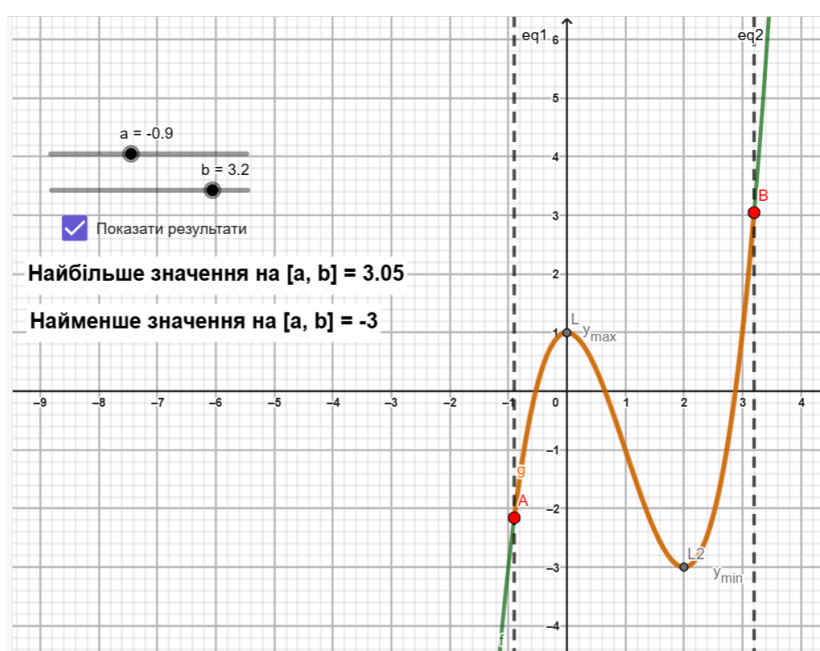


Рис. 3. Модель «Найбільше та найменше значення на відрізку $[a; b]$ »

Робочий «Аркуш дослідника» №3. Полювання за екстремумами на відрізку.

Мета: Зрозуміти різницю між локальними та глобальними екстремумами, чому найбільше значення не завжди там, де похідна дорівнює нулю.

Структура аркуша:

Крок 1: Встанови межі відрізка $[a; b]$. Знайди за допомогою моделі найвищу точку. Чи збігається вона з локальним максимумом (вершиною)?

Крок 2: Почни звужувати відрізок так, щоб вершина пагорба опинилася «за бортом» (поза межами відрізка $[a; b]$). Де тепер знаходиться найбільше значення функції?

Крок 3 (Аналіз): Чи може бути таке, що похідна в точці найбільшого значення не дорівнює нулю? (Подивись на кінці відрізка).

Висновок: Склади алгоритм: «Щоб знайти найбільше значення на проміжку $[a; b]$, треба порівняти значення функції в критичних точках та на _____».

Провокаційне запитання: Чи обов'язково найбільше значення функції на відрізку має бути «піком» (локальним максимумом)? Спробуй знайти такий відрізок для функції $y = x^2$, де найбільше значення досягається в точці, де похідна не дорівнює нулю.

Рекомендації: Використовуйте модель з вертикальними «шторами» (слайдери a і b). Автоматичне виділення максимуму/мінімуму на проміжку $[a; b]$ допомагає побачити різницю між локальними та глобальними екстремумами.

Робочі аркуші №1-3 містять чіткі кроки спостереження, формулювання гіпотез і висновків. Детальні кейси включають «сліпе дослідження» та провокаційні запитання («Чи може функція «відпочивати», якщо $f'(x) = 1$ постійно?»; «Чи завжди максимум на відрізку – це точка, де $f'(x) = 0$?»).

Робочі аркуші є ключовими практичними компонентами запропонованої методики. Вони розроблені у форматі дослідницьких аркушів (worksheet), які учень заповнює під час роботи з GeoGebra-моделями. Кожний аркуш поєднує: мету

уроку/блоку; покрокові інструкції (кроки 1–3) з чіткими діями в моделі; спостереження та провокаційні запитання; гіпотезу або дослідницьке завдання; висновок, який учень формулює самостійно (пропуски для заповнення).

Запропонована інтерактивна модель має кілька переваг: розмежовує «значення функції» та «швидкість її зміни»; демонструє, що $f'(x) = 0$ – лише «підозра» на екстремум, а не гарантія; навчає алгоритму пошуку екстремумів на відрізку: критичні точки + кінці; використовує метафори («штори», «велосипед», «пагорб») для інтуїтивного розуміння.

Всі «Аркуші дослідника» орієнтовані на розвиток дослідницьких умінь старшокласників: учень не отримує готові правила, а виводить їх через спостереження, рух елементів моделі та самоперевірку. Рекомендований час на один аркуш – 15–25 хвилин (залежно від класу).

Апробація розроблених моделей на практиці. Розроблені моделі ми реалізували на практиці під час проведення уроків математики в 10-их класах. Спостереження показали, що учням набагато цікавіше працювати з динамічними графіками, ніж зі звичайними рисунками. Особливо їх зацікавила модель зі «шторами», які обмежують відрізок $[a; b]$.

Найяскравішим моментом для старшокласників стала ситуація, коли під час звуження відрізка вершина графіка залишалася за його межами. Тоді учні наочно бачили, що найбільшим значенням раптом стає точка на кінці відрізка, і це викликало щире захоплення. За словами самих учнів, можливість самостійно рухати повзунки та одразу перевіряти свої здогадки допомогла їм краще зрозуміти тему і не боятися складних завдань.

Абстрактне правило про те, що «треба завжди перевіряти кінці відрізка», перестало бути простою «зубрінням» і стало для них логічним. Крім того, старшокласникам було дуже зручно працювати з «Аркушами дослідника», які слугували зрозумілою покроковою інструкцією на уроці.

Обґрунтовано, що формування дослідницьких умінь старшокласників у процесі вивчення теми «Похідна та її застосування» стає ефективнішим за умови використання динамічних моделей GeoGebra. Застосування авторського підходу «сліпого дослідження» дозволяє змінити роль учня з пасивного споживача інформації на активного дослідника, який самостійно виводить закономірності математичного аналізу. Розроблений методичний інструментарій, що включає три типи інтерактивних моделей (дослідження монотонності, екстремумів та точок перегину), інтегрує візуалізацію складних математичних понять із програмуванням у GeoGebra. Це забезпечує наочне розмежування властивостей функції та її похідної, що є критично важливим для розуміння геометричного змісту ключових понять. Використання спеціально розроблених «Аркушів дослідника» структурує пізнавальну діяльність учнів, спрямовуючи їх від спостереження за динамічними змінами графіків до формулювання обґрунтованих гіпотез та їх перевірки. Така організація навчання сприяє подоланню формалізму в знаннях учнів та розвитку їхньої аналітичної компетентності. Перспективи подальших досліджень полягають у розробці аналогічних інтерактивних комплексів для вивчення інтегрального числення та стереометрії.

Конфлікт інтересів. Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування дослідження. Дослідження виконано без залучення зовнішнього

фінансування.

Доступність даних. Дані можуть бути надані відповідному автору за запитом.

Використання інструментів штучного інтелекту. Під час підготовки рукопису автори використовували Gemini для мовного редагування. Автори несуть повну відповідальність за зміст публікації.

Авторський внесок. Внесок авторів є рівнозначним.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Silva C. M. S. Derivative classes in secondary education. *Journal of Research in Education and Pedagogy*, 2025. Vol. 2(2), P. 271–283. DOI: <https://doi.org/10.70232/jrep.v2i2.67>.
2. Gerami S. Framing instructional tasks for interaction with content: Introducing derivatives graphically with inquiry. *Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2023. P. 484–494. URL: <https://www.pmena.org/pmena-proceedings/PMENA%2045%202023%20Proceedings.pdf>.
3. Ocal M. F. The effect of GeoGebra on students' conceptual and procedural knowledge: The case of applications of derivative. *Higher Education Studies*, 2017. Vol. 7(2), P. 67–78. DOI: <https://doi.org/10.5539/hes.v7n2p67>.
4. Safarini T. L. S., Darhim, Juandi D. Students' proceptual thinking outcomes in learning differentiability using Desmos classroom activities based on the Three Worlds of Mathematics framework. *Mathematics Teaching Research Journal*, 2023. Vol. 15(3), P. 136–160. URL: <https://commons.hostos.cuny.edu/mtrj/wp-content/uploads/sites/30/2023/07/v15n3-Students-proceptual-thinking.pdf>.
5. Гриб'юк О. О. Система динамічної математики GeoGebra як засіб підтримки загальних і спеціальних здібностей учнів в процесі дослідницького навчання предметів математичного циклу: з досвіду роботи. *Фізико-математична освіта*, 2020. Вип. 2(24). С. 37–51. URL: <https://fmo-journal.fizmatsumdu.pub/index.php/fmo/article/view/285>.
6. Коваленко А. О. Формування дослідницької компетентності старшокласників на уроках математики засобами ІКТ. *Новітні комп'ютерні технології*, 2017. Т. XV. С. 210–214. URL: http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/Nkt_2017_15_61.pdf.
7. Дереза І. С., Іванова О. А. Використання GeoGebra у процесі навчання теми «Похідна та її застосування». *Новітні комп'ютерні технології*, 2018. Т. XVI. С. 269–274. DOI: <https://doi.org/10.31812/0564/2221>.
8. Ziatdinov R., Valles J. R. Synthesis of modeling, visualization, and programming in GeoGebra as an effective approach for teaching and learning STEM topics. *Mathematics*, 2022. Vol. 10, P. 398. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10030398>.
9. Chien T. M., Leong K. E., Chua K. H. Design-based research on instructional lessons for differential calculus incorporating Desmos. *Infinity Journal*, 2026. Vol. 15(2), P. 345–370. DOI: <https://doi.org/10.22460/infinity.v15i2.p345-370>.
10. Tall D. Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2004. Vol. 4. P. 281–288. URL: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489653.pdf>.
11. Tall D. *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. 298 p. URL: https://www.researchgate.net/publication/228817138_Advanced_Mathematical_Thinking.
12. Tall D. *Visual thinking in mathematics: an epistemological study of diagrammatic practices*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. URL: <https://www.cambridge.org/core/books/visual-thinking-in-mathematics> (дата звернення: 25.03.2026).

REFERENCES

1. Silva, C. M. S. (2025). Derivative classes in secondary education. *Journal of Research in Education and Pedagogy*, 2(2), 271–283. DOI: <https://doi.org/10.70232/jrep.v2i2.67>.
2. Gerami, S. (2023). Framing instructional tasks for interaction with content: Introducing derivatives graphically with inquiry. In *Proceedings of the North American Chapter of the International Group for*

- the Psychology of Mathematics Education*, 484–494. URL: <https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2045%202023%20Proceedings.pdf>.
3. Ocal, M. F. (2017). The effect of GeoGebra on students' conceptual and procedural knowledge: The case of applications of derivative. *Higher Education Studies*, 7(2), 67–78. DOI: <https://doi.org/10.5539/hes.v7n2p67>.
 4. Safarini, T. L. S., Darhim, & Juandi, D. (2023). Students' proceptual thinking outcomes in learning differentiability using Desmos classroom activities based on the Three Worlds of Mathematics framework. *Mathematics Teaching Research Journal*, 15(3), 136–160. URL: <https://commons.hostos.cuny.edu/mtrj/wp-content/uploads/sites/30/2023/07/v15n3-Students-proceptual-thinking.pdf>.
 5. Hrybiuk, O. O. (2020). Systema dynamichnoi matematyky GeoGebra yak zasib pidtrymky zahalnykh i spetsialnykh zdibnostei uchniv v protsesi doslidnytskoho navchannia predmetiv matematychnoho tsykladu: z dosvidu roboty [The system of dynamic mathematics GeoGebra as a means of supporting general and special abilities of students in the process of research learning of mathematics cycle subjects: from work experience]. *Fizyko-matematychna osvita*, 2(24), 37–51. URL: <https://fmo-journal.fizmatsumdu.pub/index.php/fmo/article/view/285> [in Ukrainian].
 6. Kovalenko, A. O. (2017). Formuvannia doslidnytskoi kompetentnosti starshoklasnykiv na urokakh matematyky zasobamy IKT [Forming research competence of high school students in mathematics lessons using ICT]. *Novitni kompiuterni tekhnologii*, 15, 210–214. URL: http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/Nkt_2017_15_61.pdf [in Ukrainian].
 7. Dereza, I. S., & Ivanova, O. A. (2018). Vykorystannia GeoGebra u protsesi navchannia temy “Pokhidna ta yii zastosuvannia” [Using GeoGebra in the process of teaching the topic “Derivative and its applications”]. *Novitni kompiuterni tekhnologii*, 16, 269–274. DOI: <https://doi.org/10.31812/0564/2221> [in Ukrainian].
 8. Ziatdinov, R., & Valles, J. R. (2022). Synthesis of modeling, visualization, and programming in GeoGebra as an effective approach for teaching and learning STEM topics. *Mathematics*, 10(3), 398. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10030398>.
 9. Chien, T. M., Leong, K. E., & Chua, K. H. (2026). Design-based research on instructional lessons for differential calculus incorporating Desmos. *Infinity Journal*, 15(2), 345–370. DOI: <https://doi.org/10.22460/infinity.v15i2.p345-370>.
 10. Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 281–288. URL: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489653.pdf>.
 11. Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers. URL: https://www.researchgate.net/publication/228817138_Advanced_Mathematical_Thinking.
 12. Tall, D. (2008). *Visual thinking in mathematics: An epistemological study of diagrammatic practices*. Cambridge University Press. URL: <https://www.cambridge.org/core/books/visual-thinking-in-mathematics>.

Стаття надійшла до редакції 30.04.2026 р.

Прийнята до друку 20.05.2026 р.

Опубліковано 26.05.2026 р.